

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 maggio 1918.

F. D' OVIDIO, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Geologia. — *Reperto paleolitico nell'alluvione del Simeto (Sicilia)*. Nota del Socio CARLO DE STEFANI.

Credo che in Sicilia non siano mai stati trovati resti dell'età della pietra nell'*humus* alluvionale, se non all'Acqua dei Corsari in Provincia di Palermo, località indicata dal Salinas ⁽¹⁾ e dal De Gregorio, che pur la descrisse, attribuita al Paleolitico ⁽²⁾.

A me avvenne di trovarne in una antichissima alluvione sotto le colate basaltiche, al Mulino Scarabuccieri sul Simeto in territorio di Bronte.

Il fiume Simeto, dopo avere traversato l'ampilissimo Bacino alluvionale del Feudo Nelson al Ponte della Càntera si interna in un solco strettissimo e profondo circa 25 metri entro i Basalti eruttivi dell'Etna. Questi Basalti fluenti in grande massa dalle pendici dell'Etna, si sono avanzati, come quelli del 1603, fino al fiume Simeto e si sono arrestati ed accavallati di fronte alla montagna già costituente la sponda destra del fiume. Così è avvenuto pure nelle eruzioni scese dalla parte settentrionale dell'Etna fino all'Alcantara.

⁽¹⁾ E. Salinas, *Avanzi preistorici nel travertino nell'Acqua dei Corsari presso Palermo* (Rend. Acc. dei Lincei, 20 gennaio 1907, pag. 111), e altrove.

⁽²⁾ A. De Gregorio, *Iconografia delle collezioni preistoriche della Sicilia*. Palermo, 1917, pag. 48.

Per un breve tratto, passato il Ponte della Càntera, l'alveo del Simeto è interamente in mezzo al Basalte; ma poi, raccolto sulla destra il Troina e raggiunto dopo ulteriore breve cammino il terreno sedimentario, il fiume ha scelto la sua strada, per lunghissimi tratti fra il Basalte duro e resistente, alto in certi punti circa una cinquantina di metri, a sinistra, e la roccia arenacea o schistosa Eocenica, più tenera e sfattibile, a destra. Così il fiume in generale segna il confine tra la lava ed i terreni sedimentari e circoscrive a Ponente la periferia dell'Etna. Si può dire che le colate delle successive eruzioni lo hanno spinto sempre più verso Ponente: ovvero, in altre parole, i vecchi letti del Simeto sono stati sempre più ad Oriente dei letti più recenti e di quello attuale.

Per l'appunto dopo che il fiume è uscito dalla stretta del Basalte, circa rimpetto alla Casa Rizzo, sulla destra ivi non ripida ma disposta a leggero pendio, a poco più d'una diecina di metri sul fiume è rimasto un piccolo lembo del Basalte in situazione orizzontale, alto pochi metri, posato sopra l'arenaria, però con intermezzo di un banco di ghiaie. A sinistra invece, dalla parte donde il Basalte fluiva, questo occupa tutta la parete in fondo alla quale non apparisce la base arenacea. Si vede dunque che prima dell'eruzione il piano alluviale circostante al Simeto arrivava in quel punto fino al pendio di destra; che ivi era un ripiano terrazzato rispondente ad un letto più antico e più alto del fiume; che il pendio scendeva da Ponente a Levante; che il letto del fiume nel tempo della eruzione era anche più profondo di quello odierno e non era in quel punto dove è ora perchè, infatti, dovea trovarsi più a Levante; che finalmente la eruzione basaltica lo ha riempito e soverchiato. Poco più a valle, al Mulino Scarabuccieri, mentre sulla destra il pendio, ivi assai ripido, è di arenaria molto silicea, a sinistra è di Basalte; ma sotto questo compaiono due lembi isolati dell'arenaria, uno piccolo a monte, uno più grande a valle. Altri lembi consimili più bassi seguitano a trovarsi a valle qua e là. Limitandoci ai due lembi predetti, essi si presentano nella parete con forma più o meno irregolare ma in sostanza di piramide troncata verso il fiume con sezione su per giù triangolare, ampia alla base, ristretta al vertice. Il lembo più grande si innalza una ventina di metri sul greto del fiume ed è ampio una cinquantina di metri: il più piccolo si alza pochi metri.

Sopra quest'ultimo, come nello spazio intermedio fra i due, i banchi delle successive colate basaltiche sovrapposti si presentano sufficientemente regolari e presso a poco orizzontali. Invece intorno e sopra al lembo maggiore di arenaria vedonsi prima massi avventizi di Basalte franati o spinti da più lontano luogo, forse di eruzione più antica, che ad ogni modo precedettero la corrente lavica. Questi formarono per vario tempo la superficie del terreno perchè sono coperti da suolo campestre, si direbbe da *humus*, cui succedono grandi massi lavici, scoriacei, accatastati, indi la grande cor-

rente lavica, irregolare, appunto come se avvolgesse l'ostacolo incontrato e come se in certi punti formasse una cascata dalle parti alte di questo verso i lati rimasti liberi. Nel complesso l'arenaria è coperta da circa 14 m. di Basalte. Evidentemente in quel punto la lava ha incontrato l'estremo limite della valle e si è arrestata. La faccia esterna, che è quella occidentale, dei due lembi arenacei, non presenta altra traccia che non sia quella dell'azione corrosiva del fiume. Esaminando il contatto fra l'arenaria ed il Basalte verso la parte interna del poggio, e sarebbe sulle superfici rivolte ad Oriente e sottoposte al Basalte si vedono queste incavate e corrose come fossero già state soggette ad acque correnti od a sfacimento atmosferico.

Nella parte inferiore del lembo più alto e più grande, fino a circa 15 metri sul fiume, fra l'arenaria ed il Basalte si vedono delle ghiaie della stessa natura di quelle del Simeto attuale. Nella parte più alta queste ghiaie non si vedono più. Il lembo di arenaria più piccolo e completamente sormontato dal Basalte si presenta nello stesso modo. La sua parte orientale, per l'appunto ben messa allo scoperto da un vecchio meandro del fiume, mostra che la roccia sedimentare era ed è tutta coperta di *humus* o terra con ghiaiette isolate, non abbondanti, lentiformi, delle solite rocce, specialmente di arenaria, non però di Basalte, per modo che non apparisce vi sia stato un vero letto recente del fiume, bensì il suolo di un antico ripiano alluvionale terrazzato. Sopra questa terra e sopra l'arenaria si riversò il Basalte.

Le ghiaie sovrapposte ai lembi di arenaria, ad Oriente, dalla parte di Bronte, mostrano che quelle arenarie non sono che segmenti dei contrafforti i quali cingevano, ad Occidente, la destra dell'antico Bacino del Simeto e si connettevano con le pendici tuttora esistenti a destra dell'alveo attuale. Il fiume, facendosi strada nella direzione attuale, per cansare il Basalte ha disseccato quello che era l'antico contrafforte di destra prima dell'eruzione e tagliandolo in due ha lasciato la parte montuosa sulla nuova destra e delle piccole fette sulla sinistra. Si può ripetere che prima dell'eruzione il Simeto correva più ad Oriente di oggi, che una piana cingeva il territorio nel quale il Simeto divagava senza alveo costante e certamente senza argini e che il suo letto era allora più profondo di quello di oggi ⁽¹⁾.

Torniamo al più piccolo lembo di arenaria del Mulino Scarabuccieri ed all'*humus* con ghiaie che sono nel suo lato orientale.

Essendo il materiale terroso, sebbene alquanto indurito a contatto della roccia eruttiva, disaggregabile, poco a poco si è sfatto e vi si è formata una cavità, una specie di bassa e piccola grotta a livello del fiume col Basalte

(¹) Ciò combina in tutto con quello che il Lyell dice e figura della escavazione del Simeto a traverso le lave del 1603 (C. Lyell, *Principles of Geology*, 11^a edizione, vol. I, pag. 352, fig. 27).

per tetto e l'arenaria per parete occidentale. In mezzo alla terra scavai uno strumento litico in quarzite durissima di quel tipo di roccia che accompagna talora le arenarie dell'Eocene o Miocene inferiore che sia. È una specie di raschiatoio, di tipo paleolitico.

Somiglierebbe a quell'arnese che De Gregorio (loc. cit.) chiama raschiatoio in selce della Grotta dei Puntali presso Carini (tav. 110, fig. 46) ed all'altro, detto nucleo laminare pure in selce, attribuito al Paleolitico della Grotta di Natale presso Termini (tav. 21, fig. 5).

È grosso al più mm. 8: ha mm. 72 di massima lunghezza, ad apice triangolare da una parte, base spianata dall'altra; da un lato pianeggiante, appena convesso, dall'altro pure, ma scheggiato presso l'apice, con uno dei margini quasi rettilineare, l'altro formato ad accetta. È largo mm. 44 dalla parte rispondente, si direbbe, all'accetta o apice; mm. 22 da quella rispondente alla impugnatura o base.

Il nostro oggetto, di evidente lavorazione umana, è rivestito di sottilissima, irregolare concrezione calcitica, prodotto di decomposizione della roccia circostante, che pure attesta la sua antichità. Non avevo arnesi adattati, nè tempo per eseguire uno scavo, che era fuori del mio scopo; ma è probabile che là si trovino altri oggetti consimili. Si sarebbe potuto supporre che la grotta esistesse da tempi preistorici e fosse abitata da chi lasciò quel raschiatoio: ma questa supposizione è da escludere perchè la cavità, la quale si va lentamente ingrandendo tuttora, è troppo piccola e troppo recente e sopra tutto perchè lo strumento fu raccolto da me stesso a dirittura nella terra indurita. Esso non dovette essere trasportato dalle acque nel letto di un fiume, bensì fu abbandonato sul suolo da uomini che abitavano le sponde del fiume stesso sopra un terrazzo adiacente ed alquanto più alto dell'alveo che il fiume percorreva quando avvenne l'eruzione.

L'eruzione di data ignota del Basalte che raggiunse il Simeto è dunque antichissima, non però preistorica.

Scartorius von Waltershausen e von Lasaulx ritengono che la lava sulla quale è fabbricata Bronte, scesa fino al Simeto e ricoprente lave più antiche, sia un ramo settentrionale della grandiosa *sciara* degli Zingari d'età non precisata. Sopra un ramo meridionale di questa sarebbero state trovate lampadine greche o romane. Perciò l'età del Basalte di Scarabuccieri sarebbe fra il Paleolitico e l'era storica greca o romana.

Ottica. — *Sulla maniera di stabilire le formole fondamentali dell'ordinaria teoria della diffrazione.* Nota del Corrispondente O. TEDONE.

1. Questa Nota si ricollega naturalmente all'altra avente per titolo: *Sul principio di Huygens in un campo elettromagnetico*, pubblicata in questi stessi Rendiconti ⁽¹⁾ e ne costituisce, si può dire, il completo sviluppo.

Il principio di Huygens è stato introdotto nell'ottica, principalmente, con lo scopo di giustificare, con sufficiente rapidità e generalità, le leggi fondamentali dell'ottica geometrica, nell'ipotesi ondulatoria, e di ottenere i fondamenti per una trattazione approssimata dei fenomeni di diffrazione. Com'è noto, questo principio, di origine intuitiva, è stato, poi, sostituito dal Kirchhoff, per raggiungere sempre gli intenti sopra indicati, con la formola che porta il suo nome e che egli dedusse dall'equazione dei potenziali ritardati alla quale, qualunque sia la teoria ottica che si adotta, soddisfano le componenti del vettore *luce*. Noi pensiamo che i risultati ottenuti partendo dal principio di Huygens, o dalla formola di Kirchhoff, restino meglio inquadrati nella teoria elettromagnetica della luce, o, almeno, che l'esposizione delle varie quistioni dell'ottica, dal punto di vista di questa teoria, raggiungano una maggiore uniformità, sostituendo alla formola di Kirchhoff le formole riportate e ridimostrate nella Nota citata e che stanno, con le equazioni di Maxwell del campo elettromagnetico, nella stessa relazione in cui la formola di Kirchhoff sta con l'equazione dei potenziali ritardati. Ed è ciò che, precisamente, ci proponiamo di fare nella Nota seguente.

2. CENTRO DI SCUOTIMENTO ELETTROMAGNETICO. — Supporremo che i fenomeni elettromagnetici avvengano in un dielettrico omogeneo ed isotropo (in particolare, nell'aria, o nel vuoto) ed indicheremo con ϵ e μ la costante dielettrica e la permeabilità magnetica di esso. Se, inoltre, indichiamo, come al solito, con c la velocità della luce nel vuoto, con $C = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ la velocità della luce nel nostro dielettrico e con \mathbf{p} un vettore funzione dell'argomento $\tau - \frac{r_0}{C}$, τ essendo il valore del tempo ed r_0 la distanza di un punto fisso $A_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ ad un punto variabile (ξ, η, ζ) , i valori del vettore forza elettrica \mathcal{E}_0 e di quello forza magnetica \mathcal{H}_0 , prodotti nel

(1) Vol. XXVI, ser. 5ª, seduta 4 marzo 1917.

punto (ξ, η, ζ) da un centro di scuotimento situato in A_0 , potranno essere rappresentati dalle formole

$$(1) \quad \mathcal{E}_0 = \text{rot}^2 \frac{p}{r_0} = -\Delta^2 \frac{p}{r_0} + \text{grad div} \frac{p}{r_0}, \quad \mathcal{H}_0 = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \text{rot} \frac{\partial p}{\partial t r_0}$$

nelle quali, com'è chiaro, le operazioni rot , Δ^2 ecc. devono esser fatte rispetto alle variabili ξ, η, ζ . Un campo elettromagnetico come il precedente si attribuisce alle vibrazioni di un, così detto, *dipolo* di cui p rappresenta il momento.

Se indichiamo con p' e p'' le derivate prima e seconda di p rispetto all'argomento $\tau - \frac{r_0}{C}$, possiamo porre le (1) anche sotto la forma

$$(1') \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \frac{2}{r_0^3} \left(p + \frac{r_0}{C} p' \right) + \frac{1}{r_0^3} r_0 \wedge \left[r_0 \wedge \left(3p + 3 \frac{r_0}{C} p' + \frac{r_0^2}{C^2} p'' \right) \right] = \\ &= -\frac{1}{r_0^3} \left(p + \frac{r_0}{C} p' + \frac{r_0^2}{C^2} p'' \right) + \\ &+ \frac{1}{r_0^3} r_0 \left[r_0 \times \left(3p + 3 \frac{r_0}{C} p' + \frac{r_0^2}{C^2} p'' \right) \right], \\ \mathcal{H}_0 &= -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{r_0^3} r_0 \wedge \left(\frac{r_0}{C} p' + \frac{r_0^2}{C^2} p'' \right) \end{aligned} \right.$$

in cui r_0 sta a rappresentare il vettore unitario di componenti

$$\frac{\partial r_0}{\partial \xi}, \frac{\partial r_0}{\partial \eta}, \frac{\partial r_0}{\partial \zeta}.$$

3. CENTRO LUMINOSO. — Un centro di scuotimento elettromagnetico si dirà un centro luminoso quando può comunicare al mezzo circostante vibrazioni di lunghezza d'onda così piccola da potersi considerare praticamente come infinitamente piccola, come accade per le lunghezze d'onda corrispondenti alle varie radiazioni luminose, e consideriamo il centro di scuotimento solo in quanto emette queste vibrazioni. Ora, se le (1), o (1'), rappresentano una vibrazione armonica, il vettore p è proporzionale a

$$\cos \frac{2\pi}{T} \left(\tau - \frac{r_0}{C} + T\delta \right) = \cos 2\pi \left(\frac{\tau}{T} - \frac{r_0}{\lambda} + \delta \right)$$

il fattore di proporzionalità essendo un vettore finito e costante, T indicando il periodo e λ la lunghezza d'onda della vibrazione considerata. Ne viene che, in questo caso, i termini delle (1') che contengono p, p', p'' a fattori, stanno fra loro come

$$1, \quad 2\pi \frac{r_0}{\lambda}, \quad 4\pi^2 \frac{r_0^2}{\lambda^2},$$

per cui, se r_0 è finito e λ , come s'è detto, infinitamente piccola, i termini prevalenti in (1') sono quelli che contengono p'' e possiamo, perciò, sostituire le (1') con le

$$(2) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_0 = \frac{1}{r_0 C^2} r_0 \wedge (r_0 \wedge p'') = \frac{1}{r_0 C^2} [-p'' + r_0(r_0 \times p'')], \\ \mathfrak{H}_0 = -\frac{1}{r_0 C^2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} r_0 \wedge p''. \end{cases}$$

Queste formole rappresenteranno, quindi, il centro luminoso A_0 , e, da esse, discende

$$(3) \quad \mathfrak{E}_0 = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} r_0 \wedge \mathfrak{H}_0, \quad \mathfrak{H}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} r_0 \wedge \mathfrak{E}_0.$$

4. PRINCIPIO DI HUYGENS IN UN CAMPO ELETTROMAGNETICO. —

Riportiamo qui la dimostrazione delle formole che rappresentano il principio di Huygens in un campo elettromagnetico, data nella Nota citata, per apportarvi qualche modificazione che può avere importanza espositiva. Si abbia, dunque, nel dielettrico di cui abbiamo parlato in principio, un campo elettromagnetico ed indichiamo con $\mathfrak{E}(\xi, \eta, \zeta, \tau)$, $\mathfrak{H}(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ i due vettori, forza elettrica e forza magnetica, che caratterizzano il campo. Consideriamo in esso una regione S limitata da una superficie σ regolare e dentro alla quale i due vettori \mathfrak{E} ed \mathfrak{H} sieno finiti e regolari. Supponiamo, dapprima, che la regione S sia finita; sia $A \equiv (x, y, z)$ un punto interno a questa regione ed indichiamo con r la distanza di A da un altro punto variabile di coordinate ξ, η, ζ . Se racchiudiamo, allora, A con una superficie α interna ad S che potremo sempre supporre sia una sfera col centro in A , chiamando S' la regione compresa fra σ ed α , potremo scrivere, come nella Nota più volte citata, le due relazioni

$$\begin{aligned} \int_{\sigma+\alpha} \left[\mathfrak{E} \left(t - \frac{r}{C} \right) \wedge n \right] \frac{d\sigma}{r} &= \\ &= -\operatorname{rot} \int_{S'} \frac{dS}{r} \mathfrak{E} \left(t - \frac{r}{C} \right) - \frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{S'} \frac{dS}{r} \mathfrak{H} \left(t - \frac{r}{C} \right), \\ \int_{\sigma+\alpha} \left[\mathfrak{H} \left(t - \frac{r}{C} \right) \wedge n \right] \frac{d\sigma}{r} &= \\ &= -\operatorname{rot} \int_{S'} \frac{dS}{r} \mathfrak{H} \left(t - \frac{r}{C} \right) + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{S'} \frac{dS}{r} \mathfrak{E} \left(t - \frac{r}{C} \right). \end{aligned}$$

In queste formole i vettori \mathfrak{E} ed \mathfrak{H} sono quelli che definiscono il campo elettromagnetico in cui, al posto di τ , compare l'unico parametro $t - \frac{r}{C}$ che abbiamo messo in evidenza, t essendo un valore fissato del tempo; n è

un vettore unitario normale a σ ed α , diretto verso l'interno di S' ; e l'operazione rot s'intende, naturalmente, eseguita sulle variabili x, y, z . Se, ora, come nella Nota citata, eseguiamo sulla prima delle relazioni precedenti, l'operazione rot , sulla seconda l'operazione $\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ e sottraggiamo, poi, la prima dalla seconda, troviamo

$$\begin{aligned} & -\text{rot} \int_{\sigma+\alpha} \left[\mathfrak{E} \left(t - \frac{r}{C} \right) \wedge n \right] \frac{d\sigma}{r} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma+\alpha} \left[\mathfrak{S} \left(t - \frac{r}{C} \right) \wedge n \right] \frac{d\sigma}{r} = \\ & = \left(\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta^2 \right) \int_{S'} \frac{dS}{r} \mathfrak{E} \left(t - \frac{r}{C} \right) + \text{grad div} \int_{S'} \frac{dS}{r} \mathfrak{E} \left(t - \frac{r}{C} \right). \end{aligned}$$

E, se, come supponiamo, non esistono all'interno di S masse elettriche, il secondo membro si riduce a

$$\text{grad} \int_{\sigma+\alpha} \frac{d\sigma}{r} \left[\mathfrak{E} \left(t - \frac{r}{C} \right) \times n \right]$$

ed abbiamo

$$\begin{aligned} & -\text{rot} \int_{\sigma+\alpha} \left[\mathfrak{E} \left(t - \frac{r}{C} \right) \wedge n \right] \frac{d\sigma}{r} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma+\alpha} \left[\mathfrak{S} \left(t - \frac{r}{C} \right) \wedge n \right] \frac{d\sigma}{r} - \\ & - \text{grad} \int_{\sigma+\alpha} \left[\mathfrak{E} \left(t - \frac{r}{C} \right) \times n \right] \frac{d\sigma}{r} = 0. \end{aligned}$$

Vogliamo, ora, in questa formola, far tendere a zero il raggio della sfera α . Si noti, perciò, che, indicando con r il vettore unitario di componenti $\frac{\partial r}{\partial \xi}, \frac{\partial r}{\partial \eta}, \frac{\partial r}{\partial \zeta}$, sulla superficie sferica α è $n = r$; e che, volendo cercare il limite dell'insieme dei termini che, nel primo membro dell'equazione precedente, contengono integrali estesi alla sfera α quando il suo raggio tende a zero, basterà considerare soltanto quelle parti degli integrali stessi che compaiono nel primo e terzo termine e che si ottengono eseguendo le operazioni rot e grad sul solo fattore $\frac{1}{r}$, le altre parti avendo per limite zero.

I termini da considerare sono, quindi,

$$\int_{\alpha} [(\mathfrak{E} \wedge r) \wedge r] \frac{d\sigma}{r^2} - \int_{\alpha} r(\mathfrak{E} \times n) \frac{d\sigma}{r^2} = - \int_{\alpha} \mathfrak{E} \frac{d\sigma}{r^2}$$

il vettore \mathfrak{E} , in questa equazione, dovendosi sempre ritenere funzione delle variabili d'integrazione ξ, η, ζ e di $t - \frac{r}{C}$. Ed, al tendere a zero del raggio di α , essi tendono a

$$-4\pi \mathfrak{E}(x, y, z, t).$$

Tenendo conto della formola analoga in \mathfrak{S} che si può ottenere dalla precedente scambiando i due vettori \mathfrak{E} ed \mathfrak{H} fra loro ed ε, μ con $-\mu, -\varepsilon$, si potranno scrivere le due seguenti formole

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} 4\pi\mathfrak{E}(x, y, z, t) &= -\operatorname{rot}_{\sigma} \left[\mathfrak{E} \left(t - \frac{r}{C} \right) \wedge n \right] \frac{d\sigma}{r} + \\ &+ \frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma} \left[\mathfrak{H} \left(t - \frac{r}{c} \right) \wedge n \right] \frac{d\sigma}{r} - \operatorname{grad} \int_{\sigma} \left[\mathfrak{E} \left(t - \frac{r}{C} \right) \times n \right] \frac{d\sigma}{r}, \\ 4\pi\mathfrak{H}(x, y, z, t) &= -\operatorname{rot}_{\sigma} \left[\mathfrak{H} \left(t - \frac{r}{C} \right) \wedge n \right] \frac{d\sigma}{r} - \\ &- \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma} \left[\mathfrak{E} \left(t - \frac{r}{C} \right) \wedge n \right] \frac{d\sigma}{r} - \operatorname{grad} \int_{\sigma} \left[\mathfrak{H} \left(t - \frac{r}{C} \right) \times n \right] \frac{d\sigma}{r}. \end{aligned} \right.$$

Ad esse si può dare anche la forma seguente

$$(4') \quad \left\{ \begin{aligned} 4\pi\mathfrak{E}(x, y, z, t) &= \int_{\sigma} \left\{ r \wedge \left[n \wedge \left(\frac{r}{C} \mathfrak{E}' + \mathfrak{E} \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{r}{C} n \wedge \mathfrak{H}' - r \left[n \times \left(\frac{r}{C} \mathfrak{E}' + \mathfrak{E} \right) \right] \right\}_{r=t-\frac{r}{C}} \frac{d\sigma}{r^2}, \\ 4\pi\mathfrak{H}(x, y, z, t) &= \int_{\sigma} \left\{ r \wedge \left[n \wedge \left(\frac{r}{C} \mathfrak{H}' + \mathfrak{H} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{r}{C} n \wedge \mathfrak{E}' - r \left[n \times \left(\frac{r}{C} \mathfrak{H}' + \mathfrak{H} \right) \right] \right\}_{r=t-\frac{r}{C}} \frac{d\sigma}{r^2} \end{aligned} \right.$$

nelle quali gli accenti su \mathfrak{E} ed \mathfrak{H} indicano derivate rispetto a τ .

Le (4) e (4') che sono dimostrate nel caso in cui S è finita, valgono anche nel caso in cui S si estenda all'infinito e sia limitata al finito da una superficie σ chiusa ed anche nel caso in cui σ si estenda indefinitamente se il campo elettromagnetico esiste solo in una regione finita dello spazio, o, più generalmente, se \mathfrak{E} ed \mathfrak{H} si annullano all'infinito di ordine superiore ad $\frac{1}{r}$ e gli integrali che compaiono nelle nostre formole conservano un significato. Di ciò ci si convince facilmente con i soliti procedimenti.

Se all'insieme dei valori di \mathfrak{E} , \mathfrak{H} e delle derivate primè di questi vettori, rispetto al tempo, in un punto, diamo il nome di *condizioni elettromagnetiche* in questo punto, possiamo dire, a causa delle (4), o (4'), che le condizioni elettromagnetiche in un punto A , interno ad una regione S limitata da una superficie σ , al tempo t , sono completamente determinate dalle condizioni elettromagnetiche nei vari elementi di σ agli istanti antecedenti $t - \frac{r}{C}$, r essendo la distanza di A dall'elemento variabile della superficie.

Se i due vettori \mathfrak{E} ed \mathfrak{H} continuano ad essere regolari in S , ma il punto A è esterno ad S , i secondi membri delle (4) o (4'), sono eguali a zero. E questa osservazione, insieme alle (4), o (4') stesse, mostra che, se \mathfrak{E} ed \mathfrak{H} sono regolari in tutto lo spazio per ogni valore del tempo da $-\infty$ a t , \mathfrak{E} ed \mathfrak{H} non possono avere che il valore zero in tutto lo spazio e per tutto l'intervallo di tempo considerato.

5. COMPLEMENTI AI RISULTATI PRECEDENTI. — Crediamo utile aggiungere ai risultati precedenti le seguenti osservazioni per quanto esse possano considerarsi, in parte, estranei allo scopo particolare che ci siamo proposti di raggiungere.

Supponiamo che il campo elettromagnetico sia noto all'istante $\tau = 0$ e supponiamo, per maggiore semplicità, che questo campo sia indefinito. Vuol dire che all'istante $\tau = 0$ sono noti i due vettori $\mathfrak{E}(\xi, \eta, \zeta, 0)$, $\mathfrak{H}(\xi, \eta, \zeta, 0)$ in tutto lo spazio. Allora il campo stesso è determinato in tutto lo spazio ad ogni istante t successivo all'istante iniziale e le formole che lo determinano si possono ottenere subito dalle (4'). Se supponiamo, infatti, che σ si riduca, intanto, ad una sfera di centro A , su σ è $n = -r$ e la prima delle (4'), p. es., diventa

$$4\pi\mathfrak{E}(x, y, z, t) = \int_{\sigma} \left\{ \frac{r}{c} \mathfrak{E}' + \mathfrak{E} + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{r}{c} r \wedge \mathfrak{H}' \right\}_{\tau=t-\frac{r}{c}} \frac{d\sigma}{r}.$$

Basta ora supporre che il raggio di questa sfera sia variabile ed eguale a Ct perchè la quistione propostaci sia completamente risolta dalla formola precedente e dalla analoga in \mathfrak{H} .

Dalle formole (4), o (4'), si ricavano subito altre formole che valgono nel caso in cui \mathfrak{E} ed \mathfrak{H} hanno la forma

$$\mathfrak{E}(\xi, \eta, \zeta, \tau) = e^{\sqrt{-1}k\tau} \mathfrak{A}(\xi, \eta, \zeta), \quad \mathfrak{H}(\xi, \eta, \zeta, \tau) = e^{\sqrt{-1}k\tau} \mathfrak{B}(\xi, \eta, \zeta),$$

k essendo una determinata costante, e, quindi, il campo elettromagnetico è quello determinato dal propagarsi di una sola vibrazione armonica. Sostituendo, infatti, p. es., nella prima delle (4), per \mathfrak{E} ed \mathfrak{H} , i valori precedenti, e separando, poi, la parte reale dalla parte immaginaria, si ottengono le due relazioni

$$\begin{aligned} 4\pi\mathfrak{A}(x, y, z) &= -\operatorname{rot} \int_{\sigma} (\mathfrak{A} \wedge n) \cos\left(\frac{k}{c}r\right) \frac{d\sigma}{r} + \\ &+ k \frac{\mu}{c} \int_{\sigma} (\mathfrak{B} \wedge n) \operatorname{sen}\left(\frac{k}{c}r\right) \frac{d\sigma}{r} - \operatorname{grad} \int_{\sigma} (\mathfrak{A} \times n) \cos\left(\frac{k}{c}r\right) \frac{d\sigma}{r}, \\ 0 &= \operatorname{rot} \int_{\sigma} (\mathfrak{A} \wedge n) \operatorname{sen}\left(\frac{k}{c}r\right) \frac{d\sigma}{r} + \\ &+ k \frac{\mu}{c} \int_{\sigma} (\mathfrak{B} \wedge n) \cos\left(\frac{k}{c}r\right) \frac{d\sigma}{r} + \operatorname{grad} \int_{\sigma} (\mathfrak{A} \wedge n) \operatorname{sen}\left(\frac{k}{c}r\right) \frac{d\sigma}{r}. \end{aligned}$$

Altre due formole analoghe si otterrebbero dalla seconda delle (4).

6. ESTENSIONE DELLE FORMOLE CHE RAPPRESENTANO IL PRINCIPIO DI HUYGENS. — Supponiamo, adesso, che nel campo elettromagnetico sia

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}^* \quad , \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}^*$$

\mathfrak{E}_0 ed \mathfrak{H}_0 essendo i vettori dati dalle (1), ovvero (1'), e quindi diventino infiniti nel punto A_0 che supporremo interno ad S , mentre \mathfrak{E}^* , \mathfrak{H}^* sieno regolari almeno nella regione S che continueremo a supporre limitata dalla superficie σ . Per poter scrivere le nostre formole, in queste nuove ipotesi, escluderemo il punto A_0 da S per mezzo di una sfera β di centro A_0 e interna ad S . Potremo scrivere allora, senz'altro, le (4') purchè le integrazioni che compaiono nei secondi membri di esse si intendano estesi alla superficie σ ed alla sfera β . Notiamo, poi, che su β è $n = r_0$ e, quindi,

$$\mathfrak{E}_0 \wedge n = \frac{1}{r_0^3} r_0 \wedge \left(p + \frac{r_0}{C} p' + \frac{r_0^2}{C^2} p'' \right) \quad , \quad \mathfrak{E}_0 \times n = \frac{2}{r_0^3} r_0 \times \left(p + \frac{r_0}{C} p' \right) \quad ,$$

$$\mathfrak{H}_0 \wedge n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{C r_0^2} \left\{ - \left(p' + \frac{r_0}{C} p'' \right) + r_0 \left[r_0 \times \left(p' + \frac{r_0}{C} p'' \right) \right] \right\} \quad ,$$

$$\mathfrak{H}_0 \times n = 0 \quad .$$

Per cui, andando al limite, facendo tendere a zero il raggio della sfera β , si trova

$$\lim_{r_0=0} \int_{\beta} (\mathfrak{E} \wedge n)_{t=t-\frac{r}{C}} \frac{d\sigma}{r} = - \frac{4\pi}{3} \operatorname{rot} \frac{p\left(t - \frac{R}{C}\right)}{R} \quad ,$$

$$\lim_{r_0=0} \int_{\sigma} (\mathfrak{E} \times n)_{t=t-\frac{r}{C}} \frac{d\sigma}{r} = - \frac{8\pi}{3} \operatorname{div} \frac{p\left(t - \frac{R}{C}\right)}{R} \quad ,$$

$$\lim_{r_0=0} \int_{\beta} (\mathfrak{H} \wedge n)_{t=t-\frac{r}{C}} \frac{d\sigma}{r} = - \frac{8\pi}{3} \frac{1}{C} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{\partial}{\partial t} \frac{p\left(t - \frac{R}{C}\right)}{R} \quad ,$$

indicando con R la distanza dei due punti A_0 ed A . E l'insieme dei termini, nel secondo membro della prima delle (4'), che contengono integrali estesi a β , ha per limite

$$\frac{4\pi}{3} \left\{ \operatorname{rot}^2 \frac{p\left(t - \frac{R}{C}\right)}{R} - \frac{2}{C^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{p(\dots)}{R} + 2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \frac{p(\dots)}{R} \right\} = 4\pi \operatorname{rot}^2 \frac{p\left(t - \frac{R}{C}\right)}{R} \quad ,$$

mentre il complesso dei termini analoghi che compaiono al secondo membro della seconda delle (4) converge a

$$-\frac{8\pi}{3} \frac{1}{C} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \operatorname{rot} \frac{\partial p(\dots)}{\partial t} \frac{1}{R} - \frac{4\pi}{3} \frac{1}{C} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \operatorname{rot} \frac{\partial p(\dots)}{\partial t} \frac{1}{R} =$$

$$= -4\pi \frac{1}{C} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \operatorname{rot} \frac{\partial p(\dots)}{\partial t} \frac{1}{R}.$$

Dalle (4') deduciamo, così, le formole

$$(5) \left\{ \begin{aligned} 4\pi [\mathfrak{E}(x, y, z, t) - \mathfrak{E}_0(x, y, z, t)] &= \int_{\sigma} \left\{ r \wedge \left[n \wedge \left(\frac{r}{C} \mathfrak{E}' + \mathfrak{E} \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{r}{C} n \wedge \mathfrak{H}' - r \left[n \times \left(\frac{r}{C} \mathfrak{E}' + \mathfrak{E} \right) \right] \right\}_{r=t-\frac{r}{C}} \frac{d\sigma}{r^2}, \\ 4\pi [\mathfrak{H}(x, y, z, t) - \mathfrak{H}_0(x, y, z, t)] &= \int_{\sigma} \left\{ r \wedge \left[n \wedge \left(\frac{r}{C} \mathfrak{H}' + \mathfrak{H} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{r}{C} n \wedge \mathfrak{E}' - r \left[n \times \left(\frac{r}{C} \mathfrak{H}' + \mathfrak{H} \right) \right] \right\}_{r=t-\frac{r}{C}} \frac{d\sigma}{r^2}. \end{aligned} \right.$$

7. APPLICAZIONE DELLE FORMOLE PRECEDENTI ALLA DETERMINAZIONE DI CAMPI ELETTROMAGNETICI. — Supporremo, intanto, che il campo elettromagnetico esista nel vuoto, o nell'aria, per cui sia da porsi, in tutte le nostre formole, $\varepsilon = \mu = 1$, $C = c$, e sia determinato da un centro di scuotimento elettromagnetico A_0 . Se, allora, nell'interno del campo viene introdotto un corpo estraneo, il campo viene, ordinariamente, modificato tanto all'interno che all'esterno del corpo introdotto. E la determinazione del campo elettromagnetico all'interno del corpo estraneo, come la determinazione contemporanea del campo aggiuntivo all'esterno di esso, è un problema di solito complesso. La quistione si semplifica nel caso in cui il corpo estraneo introdotto nel campo elettromagnetico è completamente assorbente tale, cioè, che trasforma in energia termica tutta quanta la energia elettromagnetica che viene a contatto con la sua superficie. In questa ipotesi \mathfrak{E} ed \mathfrak{H} si possono considerare noti, ad ogni istante, su tutta la superficie del corpo introdotto nel campo, e, precisamente, assumeranno i valori che avevano nel campo primitivo su tutti i punti di questa superficie che guardano il centro di scuotimento A_0 , i valori zero in tutti gli altri punti. Nell'interno del corpo estraneo il campo elettromagnetico è nullo; all'esterno \mathfrak{E} ed \mathfrak{H} assumono i valori determinati dalle (5) nella ipotesi che le integrazioni, ai secondi membri, sieno estesi alle porzioni della superficie del corpo esterno che guardano A_0 e, sotto gli integrali, per i valori di \mathfrak{E} ed \mathfrak{H} , si assumono i valori di essi dovuti al centro A_0 di scuotimento.

8. CASO DEI FENOMENI LUMINOSI. — Quello che abbiamo detto fin qui è applicabile ad ogni specie di fenomeni elettromagnetici. Nel caso, poi, in cui i fenomeni elettromagnetici diventino fenomeni luminosi e le grandezze

che in essi compaiono sono dello stesso ordine di grandezza di quelle corrispondenti che compaiono nei fenomeni luminosi, nei secondi membri delle (4') e (5), sotto gli integrali, si possono trascurare i termini che contengono a fattore \mathcal{E} ed \mathcal{H} rispetto a quelli che contengono \mathcal{E}' ed \mathcal{H}' e si può porre, in essi, $\varepsilon = \mu = 1$, $C = c$ se, come vogliamo supporre, si tratti sempre di un campo elettromagnetico esistente nel vuoto o nell'aria. Le considerazioni del numero precedente si possono estendere al caso attuale. E, se abbiamo un centro luminoso nel punto A_0 a causa del quale sia, nel punto (ξ, η, ζ) ,

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{r_0 c^2} r_0 \wedge (r_0 \wedge p'') \quad , \quad \mathcal{H}_0 = - \frac{1}{r_0 c^2} r_0 \wedge p''$$

p'' essendo la derivata seconda, rispetto a τ , di un vettore p funzione di ξ, η, ζ, τ , e introduciamo, poi, nelle vicinanze del punto luminoso un corpo perfettamente nero (cioè perfettamente assorbente rispetto alle radiazioni luminose), le condizioni ottiche fuori del corpo nero si possono ritenere determinate dalle (5) dopo aver introdotto in esse le precedenti semplificazioni, purchè gli integrali s'intendano estesi soltanto alle porzioni della superficie del corpo nero che guardano il centro luminoso e si sia posto, in questi integrali $\mathcal{E}_0, \mathcal{H}_0$ al posto di \mathcal{E} ed \mathcal{H} . Notando che, in queste ipotesi,

$$\mathcal{E}_0 = - r_0 \wedge \mathcal{H}_0 \quad , \quad \mathcal{H}_0 = r_0 \wedge \mathcal{E}_0 ,$$

le formole (5) si possono scrivere

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \frac{1}{4\pi c} \int_{\sigma} \left\{ r \wedge (n \wedge \mathcal{E}'_0) - n \wedge (r_0 \wedge \mathcal{E}'_0) - r(n \times \mathcal{E}'_0) \right\}_{\tau=t-\frac{r}{c}} \frac{d\sigma}{r} , \\ \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \frac{1}{4\pi c} \int_{\sigma} \left\{ r \wedge (n \wedge \mathcal{H}'_0) - n \wedge (r_0 \wedge \mathcal{H}'_0) - r(n \times \mathcal{H}'_0) \right\}_{\tau=t-\frac{r}{c}} \frac{d\sigma}{r} \end{array} \right.$$

e, quindi, salvo il nome del vettore che compare in ciascuna di esse, diventano identiche. Tenendo conto della relazione

$$r \wedge (n \wedge \mathcal{E}'_0) = n(r \times \mathcal{E}'_0) - \mathcal{E}'_0 \cos \widehat{rn}$$

in cui n indica la direzione della normale a σ , e di formole analoghe, la prima delle (6) che, soltanto, vogliamo prendere in considerazione, si scrive

$$(7) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \frac{1}{4\pi c} \int_{\sigma} \left\{ (\cos \widehat{r_0 n} - \cos \widehat{rn}) \mathcal{E}'_0 - \right. \\ \left. - (r + r_0)(n \times \mathcal{E}'_0) + n(r \times \mathcal{E}'_0) \right\}_{\tau=t-\frac{r}{c}} \frac{d\sigma}{r} .$$

Supponiamo, ora, che il nostro centro luminoso emetta luce monocromatica corrispondente al periodo T ed alla lunghezza d'onda $\lambda = cT$ e che

quindi il vettore p sia proporzionale a $\cos 2\pi \left(\frac{r}{T} - \frac{r_0}{\lambda} + \delta \right)$. Potremo allora porre \mathfrak{E}_0 sotto la forma

$$\mathfrak{E}_0 = \frac{a}{r_0} \cos 2\pi \left(\frac{r}{T} - \frac{r_0}{\lambda} + \delta \right)$$

a essendo un vettore costante, finito e normale ad r_0 e ritenere la intensità luminosa, corrispondente a questa luce, proporzionale ad $\frac{a^2}{r_0^2}$. La (7) diventa allora

$$(8) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 - \frac{1}{2\lambda} \int_{\sigma} \left\{ (\cos \widehat{r_0 n} - \cos \widehat{r n}) a - (r + r_0) (n \times a) + \right. \\ \left. + n (r \times a) \right\} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_0 + r}{\lambda} + \delta \right) \frac{d\sigma}{rr_0}.$$

A questa formola, invece che a quella di Kirchhoff, si possono collegare, sotto forma quasi immutata, le considerazioni che lo stesso Kirchhoff fa nella seconda, terza e quarta delle sue *Vorlesungen über mathematische Optik*, per giustificare le leggi fondamentali dell'ottica geometrica.

9. SUI FENOMENI DI DIFFRAZIONE. — Supponiamo, in fine, che il centro luminoso A_0 sia separato dal punto d'osservazione A da uno schermo perfettamente nero nel quale sia praticato un foro di dimensioni così piccole che, su tutta una superficie passante per il suo contorno, si possano ritenere, senza errore sensibile, costanti r , r_0 , n , r e r_0 . Nella ipotesi che la congiungente $A_0 A$ passi nelle vicinanze del contorno del foro si produrranno fenomeni di diffrazione; ed, in tutte queste ipotesi, potrà porsi anche

$$r + r_0 = 0 \quad , \quad r \times a = 0 \quad , \quad \cos \widehat{r_0 n} = -\cos \widehat{r n} ,$$

per cui, dalla (8), abbiamo

$$(9) \quad \mathfrak{E} = \frac{\cos \widehat{r n}}{\lambda r r_0} a \int_{\sigma} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_0 + r}{\lambda} + \delta \right) d\sigma$$

che è, precisamente, la formola da cui si parte per lo studio dei fenomeni di diffrazione.

Fisiologia. — « *L'ergoesthesiografo* ». Un apparecchio destinato a rappresentare graficamente le attitudini a regolare gli sforzi muscolari. Nota del Corrispondente G. GALEOTTI.

A tutti è noto quanta incertezza esista ancora per riguardo a quel senso non ben definito, che ci permette di apprezzare l'estensione e la forza dei nostri movimenti (*senso muscolare, senso articolare e tendineo, sensibilità profonda*) in modo da regolarli secondo le azioni che vogliamo compiere. Questa incertezza comprende tanto i criterî scientifici dall'argomento, invero molto complesso, quanto i metodi che si possono applicare per indagarlo.

Sappiamo, per le semplici osservazioni della vita quotidiana, che le *attitudini muscolari* individuali sono molto diverse. Alcune persone son capaci di eseguire, con grande destrezza, agilità e perfezione, tutti i loro movimenti, regolando in modo preciso le contrazioni dei muscoli, adeguatamente allo scopo che vogliono raggiungere. Altre persone, invece, goffe e maldestre, non sono capaci di questa precisione di movimenti e i loro atti sono sempre sproporzionati al fine a cui son diretti.

È vero che l'esercizio e l'allenamento possono modificare assai le capacità muscolari di queste persone, ma non di meno si può con sicurezza affermare, che le buone attitudini cinetiche sono attitudini congenite, le quali dipendono da complesse condizioni di costituzione del sistema nerveo-muscolare e riguardano contemporaneamente organi di senso ed organi centrali.

Occupandomi della scelta fisiologica dei candidati all'aviazione, pensai di trovare un modo per investigare il grado di attitudine muscolare, di cui ciascun individuo è congenitamente dotato; poichè è facile comprendere quanto sia necessario scegliere i piloti tra le persone, che hanno la capacità di regolare in modo perfetto i propri movimenti.

A tal fine ho ideato l'istrumento, che ora passo a descrivere e che ho chiamato *ergoesthesiografo*. Esso deve appunto servire a rappresentare l'attitudine, che ha un individuo, a regolare il proprio sforzo muscolare, in modo adeguato alla sensazione delle resistenze esteriori.

L'apparecchio è rappresentato nella fig. 1. Su di un robusto tavolo è imperniata una leva a braccia disuguali. Sul braccio più lungo *A* (lung. cm. 60) scorre un manicotto *B*, che porta un uncino, a cui è attaccato un peso, e un'asticella *C*, la quale serve a far scorrere il manicotto e il peso su questo braccio della leva. Sul braccio corto della leva agisce un'altra leva *D*, azionata da un manubrio.

Un'occhiata alla figura basta per far comprendere come, spingendo il manubrio in avanti, si faccia innalzare il braccio *A* della leva principale. A questa leva è congiunta una penna *E*, la quale scrive sul cilindro rotante le vibrazioni della leva medesima. Un'altra penna *G*, unita ad angolo retto con l'asticella *F*, la quale oscilla, per una trasmissione con filo e carrucole, a seconda del movimento del manicotto *B*, scrive sullo stesso cilindro le escursioni del peso su *A* e quindi le variazioni della resistenza.

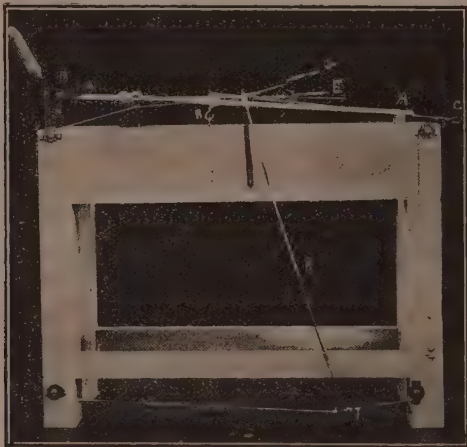


FIG. 1. — L'ergoesthesiografo.

Soggetto ed osservatore si dispongono come si vede nella fig. 2.

L'osservatore, per mezzo dell'asticella *C*, fa scorrere ritmicamente il manicotto *B*. Il soggetto, ad occhi bendati, impugna il manubrio e, *sentendo* le variazioni della resistenza, dovute allo scorrimento del peso, deve opporsi ad esse col regolare la propria forza muscolare, in modo da mantenere sempre orizzontale il braccio di leva *A*.

Sul cilindro le penne scrivono due curve: una a grandi oscillazioni regolari, le quali rappresentano le variazioni della resistenza, e questa chiamerò *curva della resistenza*; l'altra rappresenta le vibrazioni, le incertezze e gli sbalzi dei muscoli, che tentano di compensare le variazioni della resistenza. Questa curva si può chiamare *curva muscolare*.

L'esperimento si fa in generale in due modi.

Il soggetto si pone come nella fig. 2, e allora i lievi movimenti che fa sono antero-posteriori: ho chiamato questa, 1^a posizione. Ovvero il soggetto si pone lateralmente al tavolo: il piano in cui oscilla la leva *A* è perpen-

dicolare all'avambraccio e il soggetto fa piccoli movimenti di lateralità: ho chiamato questa, 2^a posizione.

Nella prima posizione l'esperimento è più facile e le curve muscolari sono sempre più regolari di quelle ottenute nella seconda posizione.

Altri dati riguardanti questi esperimenti sono i seguenti:



FIG. 2. — Come si dispongono osservatore e oggetto per un esperimento.

Il peso di carica è di Kg. 2 per la prima posizione, di Kg. 1 per la seconda. Le variazioni della resistenza vanno da Kg. 12 (apice inferiore delle oscillazioni nella curva della resistenza) a Kg. 2 (apice superiore delle oscillazioni nella curva della resistenza) nel primo caso, da Kg. 6 ad 1 nel secondo.

Le escursioni del peso son fatte in modo, che ogni oscillazione ha un periodo di circa 10 secondi.

Con questo apparecchio ho ottenuto già un grande numero di tracciati e si può dire che questi tracciati hanno un *tipo personale*, come un tipo personale hanno gli ergogrammi, ottenuti con l'apparecchio del Mosso. Ho sperimentato con diverse persone: con individui non abituati ad alcun genere di lavoro muscolare, con persone abituate a sport diversi, che richiedono destrezza e agilità di movimenti, e cioè con cavalieri, motociclisti, automobilisti e aviatori. Naturalmente è soprattutto a questi ultimi, che si è

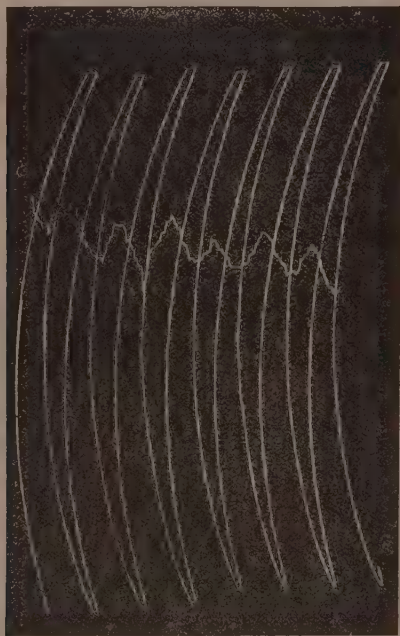


FIG. 3. — Una buona curva ottenuta da un bravo pilota.

rivolta la mia attenzione, ed ho potuto sperimentare su un certo numero di piloti, per verità ancora non troppo grande. Ho constatato con soddisfazione, che le migliori curve sono state ricavate appunto da aviatori provetti, che avevano fama di grande abilità, mentre curve non tanto buone mi sono risultate da piloti e da allievi poco sperimentati. Curve assai buone ho pure ottenuto da persone abituate a cavalcare, probabilmente perchè addestrate a mantenere le redini, con adatte contrazioni dei muscoli del braccio e dell'avambraccio, in uno stato di giusta tensione.

Cosicchè, in questo riguardo, l'apparecchio si è dimostrato corrispondente allo scopo e cioè capace di mettere in evidenza le buone o cattive attitudini muscolari degli individui in esperimento.

Teoricamente, da un individuo con meccanismi nervo-muscolari perfetti, e cioè capace di compensare in ogni istante le variazioni della resistenza con l'aumentare e col diminuire della contrazione dei suoi muscoli, si dovrebbe ottenere una semplice linea orizzontale. Ma in realtà ciò non avviene, e ciascun soggetto segue un poco le oscillazioni della resistenza, cosicchè anche una curva muscolare buonissima presenta un andamento ondulato.

Riserbando le mie conclusioni definitive, dopochè avrò raccolto un materiale ancora più ampio, posso tuttavia già dare alcuni cenni su diversi tipi di curve da me ottenuti.



FIG. 4. — Una cattiva curva, ottenuta da una persona con insufficienti attitudini muscolari.

In queste curve è da osservare:

a) *l'andamento generale della curva.* Nei casi migliori la curva muscolare si mantiene in una zona mediana del tracciato: ciò vuol dire che la persona in esperimento è capace di apprezzare e di mantenere l'orizzontalità della leva. Negli altri casi alcune persone fanno curve, che regolarmente e continuamente discendono: queste persone cioè non si accorgono che la tensione dei loro muscoli va a poco a poco cedendo; altre persone invece fanno curve che continuamente salgono, cioè esse reagiscono alle variazioni della resistenza con un sempre maggior sforzo muscolare. In generale il tipo discendente o ascendente della curva permane nella stessa persona, anche quando si ripeta molte volte l'esperimento.

b) *l'altezza delle oscillazioni principali*. Le curve migliori sono quelle, in cui le oscillazioni principali sono uniformi e poco alte. Curve mediocri sono quelle, in cui le oscillazioni principali, pur essendo uniformi, sono molto alte: questo vuol dire che il soggetto segue troppo le variazioni della resistenza, cioè non è capace di compensarle immediatamente. Curve peggiori sono quelle, in cui le oscillazioni principali non sono uniformi, ma assai variabili in altezza.

c) *la presenza di dentellature e di sbalzi*. Questo è il fatto più importante da considerarsi. Nelle curve ottime le dentellature sono piccolissime e non si vedono mai sbalzi della leva. Ciò significa che il soggetto è capace di aumentare e diminuire in modo uniforme la contrazione dei propri muscoli. Quando non è capace di ciò si hanno vibrazioni e bruschi rinforzi o abbassamenti delle contrazioni: insomma l'individuo regola saltuariamente i suoi muscoli ed allora si hanno quelle curve irregolarissime, che appunto sono caratteristiche delle persone inadatte e maldestre.

In forma schematica si possono così riassumere queste conclusioni:

Curve ottime, che indicano eccellenti attitudini muscolari: La curva rimane in una zona orizzontale mediana del tracciato; oscillazioni principali uniformi e basse con poche dentellature e senza sbalzi.

Curve mediocri: Curve ascendenti o discendenti; curve con oscillazioni principali molto alte e non uniformi; curve con molte dentellature.

Curve cattive, che indicano inattitudine a regolare adeguatamente le attività muscolari: Curve difformi, con grandi dentellature e sbalzi.

Come esempio, riporto nella fig. 3 una curva assai buona, ottenuta da un pilota bravissimo, e nella fig. 4 una curva assai cattiva, ricavata da una persona, che non ha precisione nè destrezza o agilità di movimenti e che perciò non potrebbe mai diventare un buon aviatore.

Meccanica. — *Forma intrinseca delle equazioni gravitazionali nella relatività generale*. Nota di U. OISORTI, presentata dal Socio TULLIO LEVI-CIVITA.

Nei fenomeni statici della meccanica einsteiniana, la forma quadratica quaternaria che congloba le misure dello spazio e del tempo si scinde in un termine che dipende dal tempo, e in una forma quadratica ternaria che è il quadrato dell'elemento lineare dello spazio ambiente ⁽¹⁾.

In una Nota recente Levi-Civita ⁽²⁾ riferendosi alla statica nei campi vuoti si è valso dei coefficienti di rotazione di Ricci (invarianti γ a tre in-

⁽¹⁾ Levi-Civita, *Statica einsteiniana* [questi Rend., vol. XXVI (1917), pag. 458 sgg.].

⁽²⁾ Levi-Civita, *ds² einsteiniani in campi newtoniani. II: Condizioni di integrabilità e comportamento geometrico spaziale* [questi Rend., vol. XXVII (1918), pag. 3 sgg.].

dici) e di altri invarianti che da essi si deducono (invarianti γ a quattro indici, riducibili per le forme ternarie a due soli indici) per attribuire alle equazioni dei campi predetti una notevole forma intrinseca, maggiormente atta che non la originaria a interpretare i caratteri metrici dello spazio ambiente.

Sotto questo stesso punto di vista reputo vantaggioso di applicare il criterio addirittura alle equazioni gravitazionali generali (valide cioè anche per fenomeni dinamici, oltre che statici) che il Levi-Civita stabilì per dare forma analitica esauriente alla geniale concezione einsteiniana ⁽¹⁾. Per quanto il riferimento alla originaria forma quaternaria diminuisca i vantaggi che il Levi-Civita poté sfruttare colla limitazione ai fenomeni statici (per la conseguente riduzione ad una forma ternaria), tuttavia si perviene a qualche risultato degno di nota, particolarmente la circostanza che delle 10 componenti del tensore gravitazionale (eguali ed opposte a quelle del tensore energetico) 4 si esprimono ciascuna (a meno di uno stesso fattore costante) quale somma di tre e ciascuna delle rimanenti 6 di due dei succitati invarianti γ a quattro indici, e in modo preciso il primo gruppo di quelli tra di essi a due soli indici distinti e il secondo gruppo di quelli a tre indici distinti.

1. *Richiamo delle equazioni gravitazionali.* — Sia

$$(1) \quad ds^2 = \sum_{ik}^3 g_{ik} dx_i dx_k,$$

la forma quadratica quaternaria che congloba le misure di spazio e di tempo. Il ds^2 si intenderà a priori qualunque salvo le seguenti restrizioni qualitative ⁽²⁾:

$$(2) \quad g_{00} > 0 \quad g_{ii} < 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Assumendo la (1) per forma fondamentale, sieno: $g^{(ik)}$ gli elementi reciproci ai coefficienti g_{ik} ; $g_{il, mk}$ i simboli di Riemann di prima specie. Allora le posizioni

$$(3) \quad G_{ik} = \sum_{lm}^3 g^{(lm)} g_{il, mk} \quad (i, k = 0, 1, 2, 3),$$

definiscono manifestamente un sistema doppio covariante, il cui invariante lineare

$$(4) \quad G = \sum_{ik}^3 g^{(ik)} G_{ik},$$

è la *curvatura media* del ds^2 .

⁽¹⁾ Levi-Civita, *Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein* [questi Rend., vol XXVI (1917), pag. 381 sgg.].

⁽²⁾ Levi-Civita, *Sulla espressione ecc.*, pag. 384.

Ciò premesso, il *tensore gravitazionale* viene dal Levi-Civita ⁽¹⁾ definito mediante il sistema doppio covariante i cui elementi risultano determinati dalle seguenti posizioni:

$$(I) \quad A_{ik} = \frac{1}{\chi} \left\{ G_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} G \right\},$$

dove χ dipende dalla costante f di attrazione universale e dal valore c della velocità di propagazione della luce nel vuoto a norma della relazione:

$$\chi = \frac{8\pi f}{c^4}.$$

Le equazioni gravitazionali si scrivono ⁽²⁾:

$$(II) \quad T_{ik} + A_{ik} = 0,$$

rappresentando T_{ik} gli elementi del sistema doppio covariante che definisce il *tensore energetico* ⁽³⁾.

2. *Riferimento a elementi invarianti.* — Giova riferirsi ad una quaterna generica di congruenze ortogonali $[0], [1], [2], [3]$ ⁽³⁾; designando al solito con $0, 1, 2, 3$ le linee corrispondenti, sieno $\lambda_h^{(k)}, \lambda_{h/k}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) i sistemi coordinati controvariante e covariante della congruenza $[h]$.

Si hanno allora le seguenti condizioni di ortogonalità:

$$(5) \quad \sum_0^3 g_{ik} \lambda_j^{(i)} \lambda_h^{(k)} = \varepsilon_{jh} \quad (j, h = 0, 1, 2, 3),$$

dove al solito ε_{jh} rappresenta lo zero o l'unità secondo che è $j \neq h$ oppure $j = h$.

Le precedenti sono notoriamente equivalenti anche a

$$(5') \quad \sum_0^3 g^{(ik)} \lambda_{j/i} \lambda_{h/k} = \varepsilon_{jh},$$

oppure a

$$(5'') \quad \sum_0^3 \lambda_h^{(k)} \lambda_{j/k} = \varepsilon_{jh}.$$

Ciò premesso si moltiplichino i due membri della (I) e i due membri della (II) per $\lambda_j^{(i)} \lambda_h^{(k)}$ e si faccia la somma rispetto ad i e a k da 0 a 3. posto:

⁽¹⁾ Levi-Civita, loco ultimo citato, pag. 388.

⁽²⁾ Com'è noto in questo tensore energetico è incluso il contributo di tutti i fenomeni (indipendenti dalla gravitazione) che si svolgono nel posto e nell'istante considerato.

⁽³⁾ Ricci et Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications* [Math. Ann., Bd. 54 (1900), pag. 145 sgg.].

$$(6) \quad \alpha_{jh} = \sum_{ik}^3 A_{ik} \lambda_j^{(i)} \lambda_h^{(k)}, \quad \tau_{jh} = \sum_{ik}^3 T_{ik} \lambda_j^{(i)} \lambda_h^{(k)},$$

$$(7) \quad \Gamma_{jh} = \sum_{ik}^3 G_{ik} \lambda_j^{(i)} \lambda_h^{(k)}, \quad (j, h = 0, 1, 2, 3),$$

si ottiene, tenendo conto della (5):

$$(I') \quad \alpha_{jh} = \frac{1}{\chi} \left\{ \Gamma_{jh} - \frac{1}{2} \varepsilon_{jh} G \right\},$$

e

$$(II') \quad \tau_{jh} + \alpha_{jh} = 0.$$

Viceversa da queste moltiplicate per $\lambda_{ji} \lambda_{h/i}$ e sommate rispetto a j e a h , tenendo conto delle condizioni di ortogonalità (5-5'') si ottengono le (I) e (II): pertanto il sistema (I'), (II') è equivalente al sistema (I), (II).

Le equazioni (I') e (II') presentano sulle originarie (I) e (II) il vantaggio che in esse non compariscono che invarianti, come scende dalle formole (6) e (7). — È ovvio il significato degli invarianti τ_{jh} e α_{jh} definiti dalle (6). Riferendomi ad es. ai primi è facile riconoscere (¹) che: $\tau_{jh} = \tau_{hj}$ ($j, h = 1, 2, 3$) rappresenta la componente ortogonale secondo la linea della congruenza $[h]$ dello sforzo che si esercita sopra un elemento di superficie perpendicolare alla linea della congruenza $[j]$ (o viceversa scambiando h con j); $\tau_{0j} = \tau_{j0}$ ($j = 1, 2, 3$) rappresenta la componente del flusso di energia, ceduta in un secondo di luce, secondo la linea della congruenza $[j]$; infine τ_{00} è la densità di distribuzione della energia.

3. *Espressione degli invarianti Γ_{jh} e G mediante elementi intrinseci.* — Essendo $\lambda_{h/rs}$ gli elementi del primo sistema derivato covariantemente secondo la forma fondamentale da quello del sistema $\lambda_{h/r}$, le formole

$$(8) \quad \gamma_{hij} = -\gamma_{ihj} = \sum_{rs}^3 \lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(s)} \lambda_{h/rs}$$

definiscono i *coefficienti di rotazione di Ricci*, che sono invarianti differenziali di primo ordine. Consideriamo in modo particolare gli invarianti di secondo ordine definiti dalle seguenti formole:

$$(9) \quad \gamma_{hi,kj} = \frac{d\gamma_{hik}}{ds_j} - \frac{d\gamma_{hij}}{ds_k} + \sum_p^3 \{ \gamma_{hip} (\gamma_{pkj} - \gamma_{rjk}) + \gamma_{phj} \gamma_{pih} - \gamma_{phk} \gamma_{pij} \},$$

(¹) Levi-Civita, *Sulla espressione ecc.*, pag. 384.

dove ds_j rappresenta l'elemento d'arco della linea j ; essi sono legati ai simboli di Riemann e ai parametri della quaterna ortogonale $[0], [1], [2], [3]$ dalle relazioni:

$$(10) \quad g_{il, mk} = \sum_0^3 \gamma_{qr, st} \lambda_{q/i} \lambda_{r/l} \lambda_{s/m} \lambda_{t/k}.$$

Poichè la eliminazione di G_{ik} tra la (3) e la (7) porge

$$F_{jh} = \sum_0^3 g_{il, mk}^{(lm)} g_{il, mk} \lambda_j^{(l)} \lambda_h^{(k)},$$

eliminando in questa $g_{il, mk}$ a mezzo della (10) si ottiene, dopo facili riduzioni, tenendo presenti le (5-5''):

$$(11) \quad F_{jh} = \sum_0^3 \gamma_{jr, rh}.$$

Analogamente, avendosi dalla (4) per la (3):

$$G = \sum_0^3 g_{il, mk}^{(ik)} g^{(lm)} g_{il, mk},$$

eliminando $g_{il, mk}$ per mezzo della (10) si ottiene:

$$(12) \quad G = \sum_0^3 \gamma_{tr, rt}.$$

4. *Forma intrinseca delle equazioni gravitazionali.* — Per la (11) e la (12) le relazioni (I') si possono scrivere:

$$(I'') \quad \alpha_{jh} = \frac{1}{\chi} \sum_0^3 \left\{ \gamma_{jr, rh} - \frac{1}{2} \varepsilon_{jh} \sum_0^3 \gamma_{tr, rt} \right\},$$

che unitamente alle (II') costituiscono la annunciata forma intrinseca delle equazioni gravitazionali.

Sviluppando le sommatorie e rammentando le relazioni che legano tra di loro i simboli $\gamma_{qr, st}$, analoghe a quelle ben note dei corrispondenti sim-

boli di Riemann, si ottiene con facili riduzioni:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{00} &= \frac{1}{\chi} \{ \gamma_{23,23} + \gamma_{31,31} + \gamma_{12,12} \}, \\
 \alpha_{11} &= \frac{1}{\chi} \{ \gamma_{30,30} + \gamma_{02,02} + \gamma_{23,23} \}, \\
 \alpha_{22} &= \frac{1}{\chi} \{ \gamma_{01,01} + \gamma_{13,13} + \gamma_{30,30} \}, \\
 \alpha_{33} &= \frac{1}{\chi} \{ \gamma_{12,12} + \gamma_{20,20} + \gamma_{01,01} \}; \\
 \alpha_{01} = \alpha_{10} &= \frac{1}{\chi} \{ \gamma_{02,21} + \gamma_{03,31} \}, \\
 \alpha_{02} = \alpha_{20} &= \frac{1}{\chi} \{ \gamma_{03,32} + \gamma_{01,12} \}, \\
 \alpha_{03} = \alpha_{30} &= \frac{1}{\chi} \{ \gamma_{01,13} + \gamma_{02,23} \}, \\
 \alpha_{12} = \alpha_{21} &= \frac{1}{\chi} \{ \gamma_{10,02} + \gamma_{13,32} \}, \\
 \alpha_{13} = \alpha_{31} &= \frac{1}{\chi} \{ \gamma_{10,03} + \gamma_{12,23} \}, \\
 \alpha_{23} = \alpha_{32} &= \frac{1}{\chi} \{ \gamma_{21,13} + \gamma_{20,03} \}.
 \end{aligned}
 \tag{I'''}$$

Matematica. — *Di una classe di forme dell' S_4 ognuna rappresentabile nelle coppie di un' involuzione dell' S_3 .* Nota di G. MARLETTA, presentata dal Socio CASTELNUOVO.

Il Noether, in una lettera al Segre, e poi l'Enriques ⁽¹⁾ hanno dimostrato che l'ipersuperficie cubica dell' S_4 è rappresentabile nelle coppie di un' involuzione dell' S_3 . In questa breve Nota presento una classe d'ipersuperficie, dell' S_4 , ognuna delle quali gode di questa stessa proprietà; in essa classe è contenuta la cubica sopradetta. La rappresentazione è condotta coi metodi della geometria proiettiva sintetica; si troveranno inoltre alcuni teoremi, relativi a congruenze di curve piane, che possono interessare.

1. Nell' S_3 sian dati, in posizione generica, un punto A e una curva gobba c, irriducibile e priva di punti doppi, d'ordine 8 e genere $p = 7$ (ulteriore intersezione, dunque, di due superficie cubiche aventi una retta comune e, del resto, in posizione generica tra loro).

⁽¹⁾ Enriques, *Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione di una equazione algebrica $f(xyz) = 0$ con funzioni razionali di due parametri* [Mathematische Annalen, Bd. 49 (1897), n. 19].

Un piano ω condotto per A seca c in 8 punti pei quali passa una ed una sola quartica k avente A come triplo; al variare di ω , per A, si ottengono così ∞^2 quartiche k ognuna 8-secante c e con A triplo, le quali quartiche generano una congruenza (razionale). Si vuol dimostrare che questa congruenza è d'ordine 2.

Infatti le superficie d'ordine 5 aventi il punto A 4-plo e passanti per la curva c soddisfano ⁽¹⁾ a $20 + (5 \cdot 8 - 7 + 1) = 54$ condizioni lineari, onde esse costituiscono un fascio Φ . Inoltre siccome una qualunque k_1 , delle quartiche k , ha già $8 + 3 \cdot 4 = 4 \cdot 5$ punti comuni con ogni superficie di Φ , segue che per k_1 passa una (sola) di queste superficie; sia φ_1 .

L'ulteriore intersezione di φ_1 col piano di k_1 è una retta passante per A e, generalmente, non incidente c . Viceversa è chiaro che ogni piano condotto per una siffatta retta seca ulteriormente φ_1 in una quartica k . Di rette siffatte, in φ_1 , ne esistono 2; infatti φ_1 e il cono che da A proietta c si secano in questa curva, nelle 14 corde di c uscenti da A, ognuna contata due volte, e in una quartica avente A multiplo secondo $4 \cdot 8 - 14 \cdot 2 = 4$, quartica che dunque è costituita da quattro rette uscenti da questo stesso punto ⁽²⁾. Ne segue senz'altro che le $4 \cdot 5 = 20$ rette di φ_1 passanti per A sono: queste 4 rette, le 14 corde di c sopradette, e altre 2 rette (generalmente) non incidenti c . Dunque sulla superficie φ_1 le quartiche k costituiscono due fasci.

Ed ora siccome per un punto generico dello spazio ambiente passa una sola superficie di Φ , si può concludere che

le quartiche 8-secanti una data curva gobba (irriducibile e priva di punti doppi) d'ordine 8 e genere $p = 7$, e aventi come triplo un dato punto fuori di questa curva, generano una congruenza d'ordine 2.

2. Nel numero precedente si dimostrò che in ogni superficie del fascio Φ esistono due rette, ciascuna passante per il punto A e non incidente la curva c . Tutte queste rette, che per brevità chiameremo *notevoli*, costituiscono un fascio; infatti in un piano ω , genericamente condotto per A, esiste una sola k' delle quartiche k (n. 1); questa k' appartiene ad una sola, φ' , delle superficie del fascio Φ ed è complanare con una sola delle due rette notevoli esistenti in questa superficie φ' . Nè in ω può esistere una retta notevole appartenente ad una superficie φ'' , di Φ , non coincidente con φ' , perchè in tal caso in ω oltre della k' esisterebbe un'altra quartica k , e precisamente l'ulteriore intersezione di ω con φ' , ciò che è assurdo. Dunque è proprio vero che le rette notevoli costituiscono un fascio; in questo le coppie, ognuna appartenente ad una stessa superficie di Φ , generano un'in-

⁽¹⁾ Severi, *Su alcune questioni di postulazione* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XVII (1903)], n. 10 b.

⁽²⁾ Del resto allo stesso risultato è assai facile pervenire direttamente.

voluzione. Ciò posto si indichi con α il piano del sopradetto fascio di rette notevoli; esso piano seca una qualunque delle superficie di Φ nelle due rette notevoli, in essa superficie esistenti, e in una cubica c' 8-secante la curva c e avente il punto A come doppio, cubica che, di conseguenza, appartiene a tutte le superficie del fascio Φ perchè con ognuna di esse ha già $8 + 2 \cdot 4 = 3 \cdot 5 + 1$ punti comuni. La c' è dunque quella curva, d'ordine 3, che insieme con c e con le 14 corde di questa passanti per A, costituisce la (totale) base del fascio Φ . Si osservi, ancora, che non può esistere alcun'altra cubica, oltre della c' , 8-secante c e avente A come doppio, perchè un'altra cubica siffatta dovrebbe far parte anch'essa della base di Φ , ciò che è assurdo.

Concludiamo dunque che

esiste una (sola) cubica 8-secante una data curva gobba (irriducibile e priva di punti doppi) d'ordine 8 e genere $p=7$, e che abbia come doppio un dato punto fuori di questa.

3. Mediante considerazioni perfettamente analoghe a quelle dei numeri precedenti è facile dimostrare i due seguenti teoremi:

a) *le cubiche 6-secanti una data sestica gobba (irriducibile e priva di punti doppi) di genere $p=2$, e aventi come doppio un dato punto fuori di questa, generano una congruenza d'ordine 2.*

b) *esiste una (sola) conica 6-secante una data sestica gobba (irriducibile e priva di punti doppi) di genere $p=2$, e passante per un dato punto fuori di questa ⁽¹⁾.*

4. Nell' S_4 sian date: un'ipersuperficie Γ d'ordine n avente un piano π $(n-3)$ -plo e una retta r $(n-2)$ -pla in questo; si indichi con a una generica curva di Γ secata in un sol punto variabile dagli spazi ⁽²⁾ condotti per π . Siano, inoltre, Γ' un'ipersuperficie cubica passante per r e Σ uno spazio qualunque, del resto in posizione perfettamente generica tra loro e rispetto a Γ .

Preso un punto generico P di Γ , si consideri lo spazio $\Sigma' \equiv P\pi$; esso seca Γ' e, ulteriormente, Γ in due superficie cubiche γ' e γ aventi la retta r

⁽¹⁾ Montesano, *Su i vari tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio* [Rendiconti della R. Accad. delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, fasc. 7^o (1895)], Nota 2^a, n. 1; Berzolari, *Sulle coniche appoggiate in più punti a date curve algebriche* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e lettere, serie II, vol. XXXIII (1900)], Nota 2^a, n. 42; e Severi, *Ricerche sulle coniche secanti delle curve gobbe* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXXV (1900)]. — Analogamente a come si fece nel n. 1, si può dimostrare che *le cubiche 6-secanti una data curva gobba (irriducibile e priva di punti doppi) d'ordine 7 e genere $p=6$, e aventi come doppio un dato punto fuori di questa, generano una congruenza d'ordine 3.*

⁽²⁾ Per es. in un S_3 passante genericamente per la retta r ; cfr. Noether, *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen* [Mathem. Annalen, Bd. III (1870)].

comune; si indichi con c la curva, d'ordine 8 e genere $p=7$, ulteriore intersezione di γ e γ' .

Per quanto si disse nel n. 1, esistono due (sole) quartiche k ognuna delle quali abbia come triplo il punto (variabile) $A \equiv \Sigma' a$, sia 8-secante c e passi per P . I piani di queste due quartiche secano Σ in due rette l_1 e l_2 incidenti la retta $s \equiv \Sigma\pi$. Viceversa, data una qualunque, per es. l_1 , delle rette di Σ incidenti s , lo spazio $l_1\pi \equiv \Sigma'$ secca a , fuori di π , nel punto A , ed esiste una sola quartica, k' , avente A triplo e passante per gli 8 punti in cui il piano Al_1 secca c . Questa quartica k' incontra l'ipersuperficie Γ , fuori di c di π e di A , in un sol punto: P . Dunque con la costruzione ora detta rimane stabilita una corrispondenza algebrica biunivoca fra i punti di Γ e le coppie di un'involuzione I esistente nel complesso lineare speciale generato dalle rette dello spazio Σ incidenti s . Ne segue senz'altro che

ogni ipersuperficie, dell' S_4 , d'ordine n , con piano $(n-3)$ -plo e retta $(n-2)$ -pla in questo, è rappresentabile nelle coppie di un'involuzione dell' S_3 .

Per $n=3$ questo teorema era, come si disse in principio, noto, ma ne è nuova la rappresentazione qui data.

Matematica. — *Quelques propriétés des fonctions de Bessel.*

Nota I di JOSEPH PÉRÈS, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Je démontre ici quelques propriétés des fonctions de Bessel, que j'ai énoncées ailleurs et qui permettent d'étudier très simplement les développements de Neumann et leurs généralisations.

J'utiliserai quelques résultats de la théorie des *fonctions permutables*, que je rappelle. Le symbole de *composition* $\dot{f}\dot{g}(x,y)$ désignant l'intégrale

$$(1) \quad \int_x^y f(x,\xi) g(\xi,y) d\xi,$$

si les fonctions f et g ne dependent que de $y-x$ ⁽¹⁾, en posant $y-x=t$, il vient

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{f}\dot{g}(t) &= \dot{f}\dot{g}(y-x) = \\ &= \int_x^y f(\xi-x) g(y-\xi) d\xi = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

(1) Sont permutables avec l'unité [Volterra].

On a d'ailleurs

$$\dot{\dot{f}}\dot{\dot{g}}(t) = \dot{\dot{g}}\dot{\dot{f}}(t)$$

et les calculs de composition se font comme les calculs de produits.

Sans revenir sur la définition des puissances de composition ⁽¹⁾, je rappelle que, si n est positif, on a

$$(3) \quad \dot{\dot{1}}^n = \frac{(y-x)^{n-1}}{\Gamma(n)} = \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)};$$

et que, si

$$f(t) = c \dot{\dot{1}} (\dot{\dot{1}}^0 + \dot{\dot{H}}(t)) \quad (c = \text{constante})$$

on a

$$(4) \quad \dot{\dot{f}}^n(t) = c^n \dot{\dot{1}}^n (\dot{\dot{1}}^0 + \dot{\dot{H}}(t))^n = c^n \dot{\dot{1}}^n \left(\dot{\dot{1}}^0 + n \dot{\dot{H}} + \frac{n(n-1)}{1.2} \dot{\dot{H}}^2 + \dots \right).$$

J'ai montré précédemment ⁽²⁾ que l'on peut encore définir la composition dans le cas où l'intégrale (1) cesse d'avoir un sens, f et g devenant infinies d'ordre déterminés pour $t = 0$: il suffit en général de remplacer l'intégrale par sa partie finie. Il en résulte immédiatement ⁽³⁾ que les formules (3) et (4) sont valables quel que soit n distinct d'un entier négatif; $\dot{\dot{f}}^n(t)$ étant toujours une fonction de t parfaitement définie ⁽⁴⁾. Dans tous les cas, l'exposant de composition a toutes les propriétés des exposants ordinaires.

2. Ceci posé nous démonstrerons que:

THÉOREME. — Il existe une fonction entière $\Psi(t)$ telle que la fonction de Bessel

$$(5) \quad J_n(t) = \sum_0^\infty r \frac{(-1)^r t^{n+2r}}{2^{n+2r} r! \Gamma(n+r+1)}$$

puisse, quel que soit n , se mettre sous la forme

$$(6) \quad J_n(t) = \dot{\dot{J}}_0 \dot{\dot{\Psi}}^n(t).$$

Pour le démontrer remarquons que le procédé de sommation des séries divergentes de Borel ⁽⁵⁾ conduit à associer les fonctions

$$f(\zeta) = a_0 \zeta + a_1 \zeta^2 + \dots + a_n \zeta^{n+1} + \dots$$

$$\text{et} \quad F(t) = a_0 + a_1 \frac{t}{1!} + \dots + a_n \frac{t^n}{n!} + \dots$$

⁽¹⁾ Cf. Volterra, Atti della R. Acc. dei Lincei, serie 5^a, vol. XI.

⁽²⁾ Cf. deux notes des Rend. R. A. Lincei, 1^{er} sem. 1917.

⁽³⁾ Parceque la généralisation ainsi obtenue pour la composition en conserve les propriétés.

⁽⁴⁾ Si n est un entier négatif ou nul, $\dot{\dot{1}}^n$ n'est pas nul, mais représente un symbole de derivation par rapport à t ; $\dot{\dot{f}}^n$, toujours donné par la formule (4), contient les symboles $\dot{\dot{1}}^0, \dot{\dot{1}}^{-1}$, etc. (par exemple $\dot{\dot{f}}^0 = \dot{\dot{1}}^0$) (cf. la 2^{ème} de mes Notes précédemment citées).

⁽⁵⁾ avec une modification de détail.

Nous associerons de même, r étant un exposant quelconque, les fonctions

$$(7) \quad f(\zeta) = a_0 \zeta^r + a_1 \zeta^{r+1} + \dots + a_n \zeta^{r+n} + \dots$$

$$(8) \quad F(t) = a_0 \frac{t^{r-1}}{\Gamma(r)} + a_1 \frac{t^r}{\Gamma(r+1)} + \dots + a_n \frac{t^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)} + \dots,$$

et il est immédiat que les fonctions $t F(t)$, $t^2 F(t)$, $t \frac{dF(t)}{dt}$, $t^2 \frac{d^2 F}{dt^2}$, ont pour associées, respectivement, les fonctions $\zeta^2 \frac{df}{d\zeta}$, $\zeta^3 \frac{d^2}{d\zeta^2} (\zeta f)$, $\zeta^2 \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{f}{\zeta} \right)$, $\zeta^3 \frac{d^2}{d\zeta^2} \left(\frac{f}{\zeta} \right)$. Il est d'ailleurs immédiat, qu'à des produits de fonctions f correspondront les compositions des fonctions $F(t)$ correspondantes ⁽¹⁾.

En designant alors par $j_n(\zeta)$ ⁽²⁾ la fonction associée à $J_n(t)$, l'équation différentielle de Bessel conduit, d'après les remarques précédentes, à l'équation suivante:

$$(9) \quad \frac{d^2 j_n}{d\zeta^2} \zeta^2 (1 + \zeta^2) + \frac{dj_n}{d\zeta} (2\zeta^3 - \zeta) + j_n (1 - n^2) = 0$$

que vérifie $j_n(\zeta)$. Mais cette équation admet comme solutions fondamentales

$$u(\zeta) [\psi(\zeta)]^n \quad \text{et} \quad u(\zeta) [\psi(\zeta)]^{-n}$$

avec

$$u(\zeta) = \frac{\zeta}{\sqrt{1 + \zeta^2}} \quad \psi(\zeta) = \frac{\sqrt{1 + \zeta^2} - 1}{\zeta} \quad (2).$$

En comparant les premiers termes du développement en série de j_n et de $u(\zeta) [\psi(\zeta)]^n$ on en déduit que nécessairement

$$j_n(\zeta) = u(\zeta) [\psi(\zeta)]^n$$

et, passant de là aux fonctions associées $J_n(t)$, $U(t)$, $\Psi(t)$

$$J_n(t) = \dot{U} \dot{\Psi}^n(t).$$

On a d'ailleurs

$$u(\zeta) = \sum (-1)^r \frac{\zeta^{2r+1}}{2^{2r}} C_{2r}^r = j_0(\zeta)$$

$$\psi(\zeta) = \sum (-1)^r \frac{\zeta^{2r+1}}{2^{2r+1}} \frac{1}{r+1} C_{2r}^r$$

de sorte que

$$U(t) = J_0(t) \quad , \quad \Psi(t) = \frac{J_1(t)}{t} = \frac{J_0(t) + J_2(t)}{2}.$$

Le Théorème annoncé est ainsi établi.

⁽¹⁾ de même, les exposants ordinaires et de composition se correspondent.

⁽²⁾ Il est aisé de voir que la série $j_n(\zeta)$ a un rayon de convergence non nul.

Remarque I. — La fonction $u(\zeta)$ est telle que

$$[u(\zeta)]^2 = \frac{\zeta^2}{1 + \zeta^2}$$

or la fonction associée de $\frac{\zeta^2}{1 + \zeta^2}$ est $\sin t$; on a donc

$$\dot{J}_0^2(t) = \sin t$$

ou

$$J_0(t) = [\sin t]^{1/2}$$

Remarque II. — On sait que si n est entier J_n et J_{-n} coïncident au signe près et ne fournissent donc qu'une seule solution de l'équation de Bessel correspondante. Une seconde solution s'exprime à l'aide de $\frac{dJ_n}{dn}$ et de $\frac{dJ_{-n}}{dn}$. On l'exprimera donc aisément par une formule analogue à (6) en introduisant les logarithmes de composition de M. Volterra⁽²⁾. Par exemple, si $n = 0$, la seconde solution sera

$$(10) \quad \dot{J}_0 \dot{i} \Psi$$

le symbole $i\Psi$ designant le logarithme de composition de Ψ .

3. Le Théorème précédent peut encore se démontrer comme il suit. La transformation qui fait passer de $f(\zeta)$ à $F(t)$ et qui fait correspondre aux produits de fonctions f les compositions des fonctions F a une expression analytique simple. Comme l'on a

$$(11) \quad \Gamma(\zeta) = \frac{1}{2i \sin \pi \zeta} \int_c y^{\zeta-1} e^y dy \quad (12) \quad \frac{1}{\Gamma(\zeta)} = \frac{1}{2\pi i} \int_c y^{-\zeta} e^y dy$$

la relation entre les fonctions (7) et (8) peut s'écrire

$$(13) \quad f(\zeta) = \frac{\zeta}{2i \sin \pi \zeta} \int_{c'} e^y F(-\zeta y) dy \quad (14) \quad F(t) = \frac{1}{2\pi i t} \int_{c''} e^y f\left(\frac{t}{y}\right) dy \quad (3).$$

(1) En effet, par un changement de variable et de fonction très simple on ramène cette équation à l'équation $y''_{x^2} - n^2 y = 0$.

(2) Cf. le Mémoire déjà cité: Atti della R. A. dei Lincei.

(3) Dans les formules précédentes les contours d'intégration sont les suivants: c est formé par le segment $-\infty - R$ de l'axe réel, le cercle de rayon R , décrit autour de l'origine dans le sens positif, le segment $-R - \infty$ de l'axe réel. c' et c'' sont deux

Mais on sait que

$$(15) \quad J_n(t) = \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^n}{2\pi i} \int_c e^{u - \frac{t^2}{4u}} u^{-n-1} du$$

formule qui, par le changement de variable

$$y = u - \frac{t^2}{4u}$$

devient

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi i t} \int_{c''} e^y \frac{\frac{t}{y}}{\sqrt{1 + \frac{t^2}{y^2}}} \left\{ \frac{\sqrt{1 + \frac{t^2}{y^2}} - 1}{\frac{t}{y}} \right\}^n dy.$$

Il en résulte bien que la fonction associée $j_n(\zeta)$ est

$$\frac{\zeta}{\sqrt{1 + \zeta^2}} \left\{ \frac{\sqrt{1 + \zeta^2} - 1}{\zeta} \right\}^n.$$

contours analogues. Lorsque r est entier, on doit remplacer (13) par

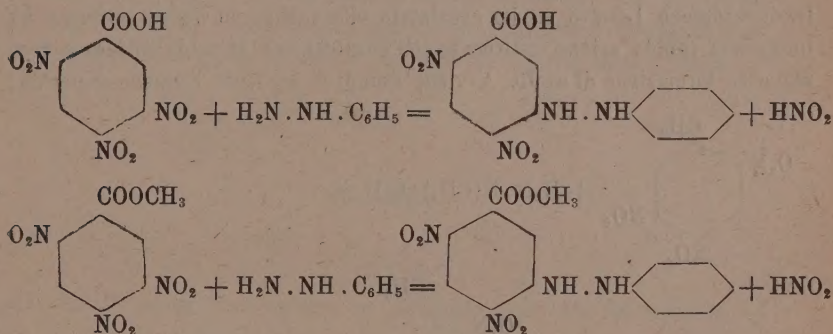
$$f(\zeta) = \zeta \int_0^\infty e^{-y} F(\zeta y) dy$$

et on peut prendre pour c'' un cercle de centre l'origine. On obtient alors des formules bien connues.

Chimica. — *Ricerche sopra i nitro-derivati aromatici. Sulla formazione dei nitro-idrazo-composti* ⁽¹⁾. Nota di MICHELE GIUA, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

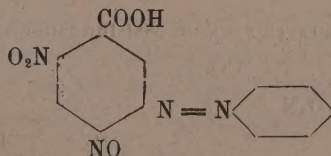
Dopo aver studiata l'azione della fenilidrazina sopra il β e il γ -trinitrotoluene e descritti in una Nota precedente ⁽²⁾ i composti ottenuti, ho continuato le ricerche su questo argomento facendo agire la fenilidrazina sopra l'acido 1-3-4-6-trinitro-benzoico e sopra il suo eterè metilico.

Questi composti contengono un gruppo nitrico mobile come il β - e il γ -trinitrotoluene; trattati con fenilidrazina in soluzione alcoolica a temperatura ordinaria danno luogo facilmente ai seguenti idrazocomposti:



Anche in questo caso, l'acido nitroso che si forma nella reazione agisce sopra l'eccesso di fenilidrazina svolgendo azoto e formando acqua e benzolo.

Analogamente a quanto avviene per gli idrazocomposti ottenuti dal β - e dal γ -trinitro-toluene, anche il 2-4-dinitro-5-carbossi-idrazo-benzene, in soluzione alcoolica per azione dell'acido cloridrico gassoso, perde una molecola di acqua e si trasforma in un nitroso-azo-composto della formula



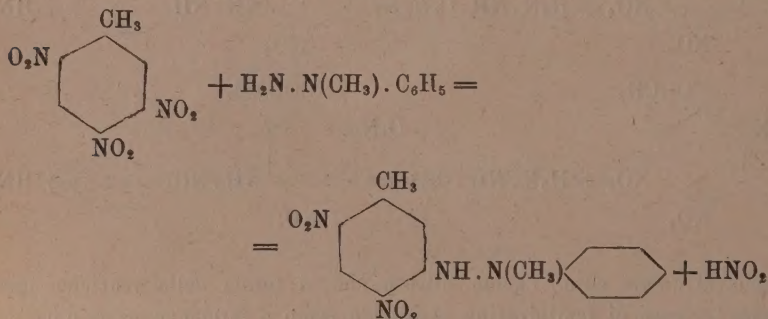
⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica generale della R. Università di Sassari.

⁽²⁾ Questi Rendiconti, vol. XXVII, 1° sem. 1918, fasc. 7°, pag. 247.

L'azione della fenilidrazina sull'acido 1-3-4-6-trinitro-benzoico è caratteristica; data la presenza d'un gruppo carbossile era da aspettarsi la formazione del fenilidrazide o del rispettivo sale trinitrobenzoico della fenilidrazina.

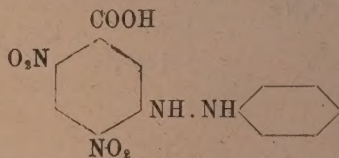
Invero l'acido trinitrobenzoico simmetrico dà luogo immediatamente alla formazione del trinitrobenzoato, sostanza bianca, pochissimo solubile in alcool, che fonde a 145°, decomponendosi. Per il primo acido trinitrobenzoico la reazione, come ho detto, segue una via diversa, iniziandosi subito coll'attacco della fenilidrazina al gruppo nitrico labile; quest'azione è così rapida che dopo pochi istanti si ottiene il prodotto della reazione sotto forma di una massa solida gialla.

Dato questo notevole comportamento della fenilidrazina verso i nitrocomposti contenenti un gruppo nitrico mobile ho creduto di estendere le mie ricerche anche a derivati della fenilidrazina con gruppi sostituenti legati all'azoto idrazinico. Ho così fatto agire la fenil-metil-idrazina as. sopra il trinitro-toluene 1-3-4-6 ed ho constatato che anche con questa sostanza ha luogo una rapida azione sostituyente con eliminazione di acido nitroso e conseguente formazione di azoto. Avviene quindi la seguente reazione generale:



Questo idrazocomposto sostituito è molto interessante data la sua costituzione chimica; il suo comportamento rispetto all'acido cloridrico gassoso, in soluzione alcoolica è diverso dagli altri composti fin qui cennati. Su questo composto, come su altri simili, mi fermerò in una prossima Nota.

2-4-BINITRO-5-CARBOSSI-IDRAZOBENZENE



Gr. 5 di acido trinitrobenzoico 1-3-4-6 disciolti in cc. 20 di alcool etilico si trattano con gr. 6 di fenilidrazina, si ha subito una intensa colo-

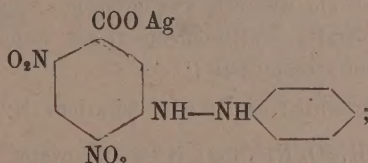
razione rosso-oscuro mentre si nota un aumento di temperatura. Dopo poco tempo precipita una sostanza gialla: si riscalda a b. m. per circa mezz'ora in modo che il precipitato si disciolga e quindi si lascia raffreddare lentamente. Dopo un poco si deposita una massa colorata in giallo-rossastro che cristallizza dall'acqua in aghetti gialli che fondono a 135° con decomposizione. Resta indisciolta una sostanza brunastra che fonde sotto 100°, ma che non ho studiato ulteriormente.

Gr. 0,1183 di sostanza: cc. 18,2 di N ($t = 16^\circ$, $H = 752$ mm.)

per $C_{13}H_{10}O_6N_4$ (318)	N %	Trovato	17,98
		Calcolato	17,60.

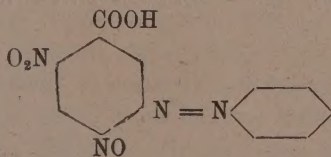
La sostanza è solubile in alcool, acetone, e in acqua a caldo; pochissimo solubile in etere di petrolio.

Sale d'argento. — Per l'aggiunta di nitrato d'argento alla soluzione acquosa dell'acido binitro-carbossi-idrazobenzene si ottiene un precipitato fioccoso che imbrunisce rapidamente. All'analisi questo sale mostra un contenuto maggiore di argento di quello che non corrisponda alla formula:



per cui non si ottiene praticamente un composto puro. La soluzione ammoniacale del nitrato d'argento viene ridotta rapidamente da questo acido.

2-NITROSO-4-NITRO-5-CARBOSSI-AZOBENZENE



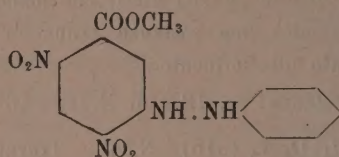
Si ottiene dall'acido precedente disciolto in alcool metilico per l'azione dell'acido cloridrico gassoso; per raffreddamento si precipita una massa cristallina gialla. Dall'alcool cristallizza in aghetti giallo-dorati che fondono a 244° con decomposizione.

Gr. 0,1603 di sostanza: cc. 26,5 di N ($t = 15^\circ$, $H = 748$ mm.)

per $C_{13}H_8O_5N_4$ (300)	N %	Trovato	19,15
		Calcolato	18,66.

La sostanza è solubile in alcool, etere, cloroformio, acetone e benzene; pochissimo solubile in etere di petrolio.

2-4-BINITRO-5-CARBOMETOSI-IDRAZOBENZENE



Gr. 1,75 di etere metilico dell'acido 1-3-4-6-trinitro-benzoico disciolti in 5 cc. di alcool si trattano con gr. 1,5 di fenilidrazina; si ottiene subito una intensa colorazione rossa e dopo poco si ha la separazione d'una massa cristallina colorata in rosso-aranciato, la quale, purificata dall'alcool, fonde a 177-178° con sviluppo di gas. Cristallizza in lamelle lucenti. Dall'alcool metilico assoluto contenente alquanto benzene oltre a questa sostanza, si ottengono cristalli prismatici colorati in giallo-chiaro che fondono a 147° in un liquido giallo-rosso, che comincia a svolgere gas solamente alla temperatura di 175-178°. Si tratta evidentemente di una forma isomera che spesso si presenta nei nitroidrazocomposti ⁽¹⁾.

Gr. 0,6850 di sostanza: cc. 16,8 di soluzione N ¹/₂ di H₂SO₄

per C ₁₄ H ₁₂ O ₄ N ₄ (332) N %	Trovato	17,18
	Calcolato	16,90.

La sostanza è solubile in alcool, etere, acetone, benzene e cloroformio; poco in etere di petrolio.

(¹) Willgerodt e Böhm, Journ. prakt. Chem. 43, 482 (1891).